

Inteligentne Systemy Obliczeniowe

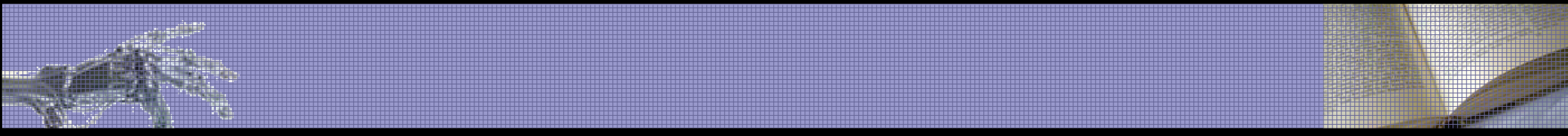
Wykład 3

Piotr Wąsiewicz

Zakład Sztucznej Inteligencji - ISE PW

pwasiewi@elka.pw.edu.pl





Techniki zapisu wiedzy niepewnej



Tablica warunkowo-działaniowa

Tablice warunkowo-działaniowe (condition-action tables) zwane są również systemem informacyjnym i zostały zaproponowane przez prof. Z.Pawlaka.

	Atrybuty warunkowe		Atrybut działaniowy
	a	b	c
x_1	L	0	u
x_2	H	0	u
x_3	L	1	w
x_4	H	1	v
x_5	L	2	w
x_6	H	2	w



Tablice tego typu mogą być tworzone na podstawie bazy danych, protokołu wywiadu z ekspertem lub protokołu obserwacji danego procesu. Z każdym atrybutem związany jest zbiór jego wartości zwany dziedzina np. $a \in \{L, H\}, b \in \{0, 1, 2\}, c \in \{u, v, w\}$. Elementy x_1, \dots, x_n zwane są obiektami lub jednostkami np. pacjenci, jednostki czasu itp. Tablica jest *kompletna*, jeśli wszystkie permutacje wartości atrybutów warunkowych są w niej zawarte. W części działaniowej może wystąpić też kilka atrybutów. Obiekt x_1 może być opisany w następujący sposób:

$$(x_1, a, L) \wedge (x_1, b, 0) \Rightarrow (x_1, c, u)$$

lub zamieniając stałą x_1 na zmienną x :

$$(x, a, L) \wedge (x, b, 0) \Rightarrow (x, c, u)$$

W podobny sposób dla obiektu x_2 :

$$(x, a, H) \wedge (x, b, 0) \Rightarrow (x, c, u)$$

Dwie ostatnie reguły mogą być zastąpione jedną prostszą regułą:

$$(x, b, 0) \Rightarrow (x, c, u)$$



Po uproszczeniu tak wygląda baza reguł dla podanej, pełnej tablicy :

$$(b, 0) \Rightarrow (c, u)$$

$$(a, L) \wedge (b, 1) \Rightarrow (c, w)$$

$$(b, 2) \Rightarrow (c, w)$$

$$(a, H) \wedge (b, 1) \Rightarrow (c, v)$$

Po skreśleniu wiersza dla x_3 można otrzymać następujący baza reguł:

$$(b, 0) \Rightarrow (c, u)$$

$$(b, 1) \Rightarrow (c, v)$$

$$(b, 2) \Rightarrow (c, w)$$

Z drugiej reguły usuneliśmy warunek z artybutem a , gdyż nie występował w innych regułach. Opuszczona reguła $(a, L) \wedge (b, 1) \Rightarrow (c, w)$ została zgubiona. W ten sposób nowa baza reguł mniej dokładnie opisuje jakąś dziedzinę wiedzy niż zestaw reguł wyprowadzony dla pełnej tablicy.



Relacje nierozróżnialności

W tablicach atrybuty warunkowe i działaniowe mogą nie być rozróżniane.

	Warunki			Działania
	a	b	c	d
	znajomość terenu	poziom paliwa	odległość	szybkość[$\frac{km}{godz}$]
x_1	słaba	niski	mała	< 50
x_2	słaba	niski	mała	< 50
x_3	dobra	niski	średnia	< 50
x_4	dobra	średni	mała	50..80
x_5	słaba	niski	mała	< 50
x_6	słaba	wysoki	duża	> 80



Relacje nierozróżnialności

Niech Q oznacza zbiór wszystkich atrybutów np. $Q = \{a, b, c, d\}$. Niech P będzie dowolnym niepustym zbiorem Q . Niech U będzie zbiorem wszystkich obiektów np. $U = \{x_1, x_2, \dots, x_6\}$. Dwa obiekty x, y nie dają się odróżnić w zbiorze P , co oznaczamy

$$x \widetilde{P} y,$$

jeśli x oraz y mają te same wartości dla wszystkich atrybutów ze zbioru P np. dla podanej tablicy można napisać:

$$x_3 \widetilde{\{a\}} x_4$$

$$x_2 \widetilde{\{b,d\}} x_3$$

$$x_1 \widetilde{Q} x_2$$

$$x_1 \widetilde{Q} x_5$$



Relacja *nierozróżnialności* związana z P jest relacją równoważności na U . Można mówić w takim przypadku o klasyfikacji U generowanej przez P , którą oznacza się P^* . *Klasyfikacja* P^* jest zbiorem klas równoważności (zwanych również blokami) relacji nierozróżnialności np.: klasyfikacja $\{a\}^*$ ma dwa bloki $\{x_1, x_2, x_5, x_6\}$ oraz $\{x_3, x_4\}$, a wszystkie możliwe klasyfikacje podanej wcześniej tabeli są podane poniżej:

$$\{a\}^* = \{\{x_1, x_2, x_5, x_6\}, \{x_3, x_4\}\}$$

$$\{b\}^* = \{\{x_1, x_2, x_3, x_5\}, \{x_4\}, \{x_6\}\}$$

$$\{c\}^* = \{\{x_1, x_2, x_4, x_5\}, \{x_3\}, \{x_6\}\}$$

$$\{d\}^* = \{\{x_1, x_2, x_3, x_5\}, \{x_4\}, \{x_6\}\}$$

$$\{a, b\}^* = \{\{x_1, x_2, x_5\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_6\}\}$$

$$\{a, c\}^* = \{\{x_1, x_2, x_5\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_6\}\}$$

$$\{a, b, c\}^* = \{\{x_1, x_2, x_5\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_6\}\}$$

$$Q^* = \{\{x_1, x_2, x_5\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_6\}\}$$



Niech P oraz R będą niepustymi podzbiorami zbioru atrybutów Q . Zbiór R jest zależny od P , jeśli

$$\overline{P} \subseteq \overline{R}$$

co ma miejsce przy spełnionej nierówności

$$P^* \leq R^*$$

Klasyfikacja P^* jest mniejsza lub równa klasyfikacji R^* , jeśli dla każdego bloku B klasyfikacji P^* istnieje blok B' klasyfikacji R^* taki, że

$$B \subseteq B'$$

Niech $P = \{a, b\}$ oraz $R = \{d\}$, wówczas

$$P^* = \{\{x_1, x_2, x_5\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_6\}\} \leq R^* = \{\{x_1, x_2, x_3, x_5\}, \{x_4\}, \{x_6\}\},$$

zatem $\{d\}$ jest zależny od $\{a, b\}$.



Teoria zbiorów przybliżonych (1981)

Podstawową ideą *zbiorów przybliżonych* (ang. *rough sets*) jest wyznaczenie dolnej i górnjej aproksymacji dla klasyfikacji generowanych przez atrybuty. Na podstawie tych aproksymacji wyznaczane są dwa zbiory re-
guł: pewnych i możliwych przetwarzane niezależnie przez dwie maszyny wnioskujące.

Teoria ma pewne powiązania z teorią Dempstera-Shafera i jest szczególnie odpowiednia w procesie pozyskiwania wiedzy nieśpójnej i niepewnej. Jej zaletą poza prostymi algorytmami jest fakt, że nie wymaga dodatkowych wstępnych informacji o przetwarzanych danych, ani prawdopodobieństwa, ani rozkładów prawdopodobieństwa a priori, ani funkcji przynależności w zbiorach rozmytych.

Niech U będzie niepustym zbiorem zwanym *uniwersum*, natomiast R relacją równoważności na U zwaną relacją nierozróżnialności. Uporządkowaną parę $A = (U, R)$ nazywać będziemy *przestrzenią aproksymującą*. Dla dowolnego elementu x należącego do U klasa równoważności R zawierająca x oznaczana będzie przez $[x]_R$. Klasy równoważności R nazywane są *elementarnymi zbiorami* w A .



Niech dany będzie pewien podzbiór X uniwersum U . Celem zdefiniowania zbioru X za pomocą zbioru A wprowadzić możemy dwie aproksymacje.

Dolna aproksymacja X w A , oznaczona przez $\underline{R}X$, jest zbiorem

$$\{x \in U \mid [x]_R \subseteq X\}$$

Górna aproksymacja X w A , oznaczona przez $\overline{R}X$, jest zbiorem

$$\{x \in U \mid [x]_R \cap X \neq \emptyset\}$$

Dolna aproksymacja X w A jest największym zbiorem w A zawartym w X . Górna aproksymacja X w A jest najmniejszym zbiorem w A zawierającym X .



Niech uniwersum $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$, a R relacja równoważności określa klasyfikację - zbiór klas równoważności R :

$$R^* = \{\{x_1\}, \{x_2, x_3\}, \{x_4, x_5\}, \{x_6, x_7\}, \{x_8\}\}$$

Niech zbiór X ma następującą postać $\{x_1, x_2, x_3, x_5, x_7\}$. Wówczas dolną aproksymacją X w A będzie zbiór:

$$\underline{R}X = \{x_1, x_2, x_3\},$$

natomiast górną aproksymacją X w A będzie zbiór:

$$\overline{R}X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$$



Przykładowe aproksymacje dolna i górna

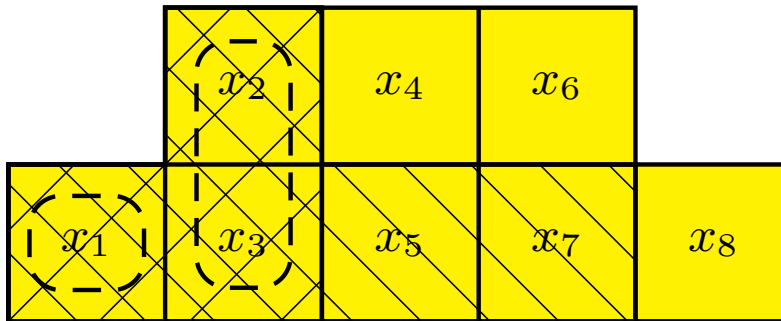
$$U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$$




$$R^* = \{\{x_1\}, \{x_2, x_3\}, \{x_4, x_5\}, \{x_6, x_7\}, \{x_8\}\}$$

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_7\}$$

Dolna aproksymacja X w A :

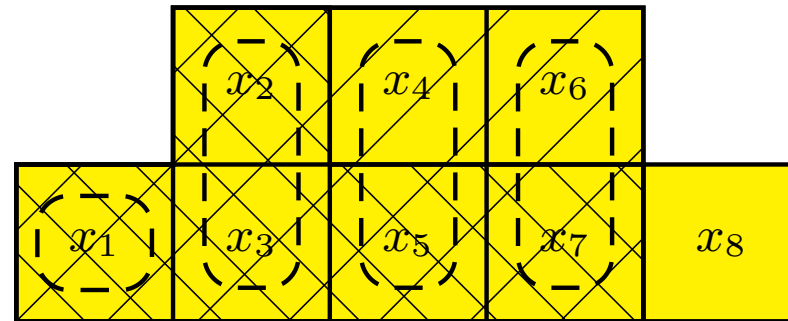
$$\underline{R}X = \{x_1, x_2, x_3\}$$






 - U ,
  - X ,
  - $\underline{R}X$

Górna aproksymacja X w A :

$$\overline{R}X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$$



 - U ,
  - X ,
  - $\overline{R}X$



Niech X i Y będą podzbiarami U . Dolna i górna aproksymacja X i Y w A mają następujące właściwości:

$$\underline{R}X \subseteq X \subseteq \overline{R}X$$

$$\underline{R}U = U = \overline{R}U$$

$$\underline{R}\phi = \phi = \overline{R}\phi$$

$$\underline{R}(X \cup Y) \supseteq \underline{R}X \cup \underline{R}Y$$

$$\overline{R}(X \cup Y) = \overline{R}X \cup \overline{R}Y$$

$$\underline{R}(X \cap Y) = \underline{R}X \cap \underline{R}Y$$

$$\overline{R}(X \cap Y) \subseteq \overline{R}X \cap \overline{R}Y$$



Oznaczmy przez $-X$ uzupełnienie $U - X$ zbioru X

$$\underline{R}(X - Y) \subseteq \underline{R}X - \underline{R}Y$$

$$\overline{R}(X - Y) \supseteq \overline{R}X - \overline{R}Y$$

$$\underline{R}(-X) = -\overline{R}X$$

$$\overline{R}(-X) = -\underline{R}X$$

$$\underline{R}X \cup \overline{R}(-X) = X$$

$$\underline{R}(\underline{R}X) = \overline{R}(\underline{R}X) = \underline{R}X$$

$$\overline{R}(\overline{R}X) = \underline{R}(\overline{R}X) = \overline{R}X$$



Tabela z regułami

	Warunki				Decyzja
	Temperatura (<i>T</i>)	Suchy kaszel (<i>SK</i>)	Ból głowy (<i>BG</i>)	Ból mięśni (<i>BM</i>)	Grypa (<i>G</i>)
0	normalna	brak	brak	brak	nie
1	normalna	brak	tak	tak	nie
2	średnia	brak	tak	tak	tak
3	średnia	tak	brak	brak	nie
4	średnia	tak	brak	brak	tak
5	wysoka	brak	brak	brak	nie
6	wysoka	tak	brak	brak	nie
7	wysoka	tak	brak	brak	tak
8	wysoka	tak	tak	tak	tak
9	wysoka	tak	tak	tak	tak



Reguły pewne i możliwe

Podana tablica dotyczy zagadnień medycznych i zawiera niespójności, np.: pacjenci 3 i 4 lub 6 i 7. Klasyfikacja pacjentów chorych na grypę i nie chorych może być dokonana w następujący sposób:

$$\mathcal{X} = \{\{2, 4, 7, 8, 9\}, \{0, 1, 3, 5, 6\}\}$$

Spośród czterech atrybutów warunkowych, trzy atrybuty T, SK, BG stanowią *redukt* tzn. są niezbędne dla właściwego podejmowania decyzji. Atrybut BM jest redundacyjny. Oznaczmy zbiór atrybutów T, SK, BG przez P . Wyznamy dolną aproksymację $\underline{P}\mathcal{X}$ eliminując niespójne dane z \mathcal{X} :

$$\underline{P}\mathcal{X} = \{\{2, 8, 9\}, \{0, 1, 5\}\}$$

$$\text{dla } P^* = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3, 4\}, \{5\}, \{6, 7\}, \{8, 9\}\}$$

oraz górną aproksymację $\overline{P}\mathcal{X}$:

$$\overline{P}\mathcal{X} = \{\{2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}, \{0, 1, 3, 4, 5, 6, 7\}\}$$



Reguły pewne i możliwe

Ze zbioru $\underline{P}\mathcal{X} = \{\{2, 8, 9\}, \{0, 1, 5\}\}$ określającego dolną aproksymację wynikają reguły pewne:

$$2 : (T, srednia) \wedge (SK, brak) \wedge (BG, tak) \Rightarrow (G, tak)$$

$$8 : (T, wysoka) \wedge (SK, tak) \wedge (BG, tak) \Rightarrow (G, tak)$$

$$9 : (T, wysoka) \wedge (SK, tak) \wedge (BG, tak) \Rightarrow (G, tak)$$

$$0 : (T, normalna) \wedge (SK, brak) \wedge (BG, brak) \Rightarrow (G, nie)$$

$$1 : (T, normalna) \wedge (SK, brak) \wedge (BG, tak) \Rightarrow (G, nie)$$

$$5 : (T, wysoka) \wedge (SK, brak) \wedge (BG, brak) \Rightarrow (G, nie)$$

Pozostałe reguły wynikające z tabeli tworzą zbiór reguł możliwych.



Teoria zbiorów rozmytych (1965)

Niech U będzie przestrzenią rozważanych obiektów (ang. *universe of discourse*). Zbiór taki scharakteryzujemy przez funkcję ustalającą przynależność do zbioru $u_w: U \rightarrow \{0, 1\}$. Symbolem A oznaczony jest zbiór odpowiadający rozpatrywanej własności. Funkcja u_w jest wówczas określona następująco:

$$\forall u \in U \quad \mu_A(u) = \begin{cases} 1 & \mu \in A, \\ 0 & \mu \notin A \end{cases}$$

Dla wielu własności trudno jest określić granicę rozdzielającą elementy spełniające od niespełniających. Funkcją μ w takim przypadku nazywać się będzie *funkcją przynależności* (ang. *membership function*), przekształcającą elementy przestrzeni U w odcinek $[0, 1]$. Zbiór taki nazywany jest *rozmytym* (ang. *fuzzy*) np. zbiór A jest pewnym podzbiorem U o niewyraźnych granicach.



Wszelkie pojęcia oraz własności związane ze zbiorami rozmytymi można wprowadzić za pomocą funkcji przynależności.

Dwa zbiory rozmyte są równe $A = B$, jeśli $\forall u \in U \quad \mu_A(u) = \mu_B(u)$.

$$A = \phi \Leftrightarrow \mu_\phi(u) = 0$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall_{u \in U} \mu_A(u) \leq \mu_B(u)$$

Nośnikiem zbioru A jest nazywany zbiór elementów U , dla których wartość μ_A jest większa od zera.

Wysokością zbioru A jest kres górny funkcji μ_A , tzn. $\sup_{u \in U} \mu_A(u)$.

Zbiór rozmyty jest nazywany *znormalizowanym*, jeśli jego wysokość jest równa 1.



Zadeh wprowadził specyficzną notację dla zbiorów rozmytych nieprzeliczalnych

$$A = \int_U \mu_A(u)/u$$

lub w przypadku przeliczalnym

$$A = \sum_i \mu_A(u_i)/u_i$$

gdzie znak / nie oznacza dzielenia np. tabele prędkości $V = \{0, 20, 40, 60, 80, 100\}$ oraz określeń ich szybkości, czy też stopnia niebezpieczeństwa można zapisać w następujący sposób:

$$SZYBKIE = 0/0 + 0.02/10 + 0.1/40 + 0.8/60 + 0.9/80 + 1/100$$

$$NIEBEZP = 0/0 + 0.1/10 + 0.2/40 + 0.7/60 + 1/80 + 1/100$$

Preferowana jednak będzie następująca notacja:

$$SZYBKIE = \{(0, 0), (20, 0.02), (40, 0.1), (60, 0.8), (80, 0.9), (100, 1)\}$$



Wszystkie operacje na zwykłych zbiorach mogą być rozszerzone na zbiory rozmyte.

Uzupełnienie \bar{A} zbioru rozmytego A definiowane jest jako:

$$\mu_{\bar{A}}(u) = 1 - \mu_A(u)$$

Suma dwóch zbiorów rozmytych $A \cup B$ definiowane jest przez:

$$\mu_{A \cup B}(u) = \max(\mu_A(u), \mu_B(u))$$

Przecięcie dwóch zbiorów rozmytych $A \cap B$ definiowane jest przez:

$$\mu_{A \cap B}(u) = \min(\mu_A(u), \mu_B(u))$$

Suma ograniczona:

$$\mu_{A \oplus B}(u) = \min(\mu_A(u) + \mu_B(u), 1)$$

Różnica ograniczona:

$$\mu_{A \ominus B}(u) = \max(\mu_A(u) - \mu_B(u), 0)$$

Iloczyn:

$$\mu_{AB}(u) = \mu_A(u) \cdot \mu_B(u)$$



Teoria zbiorów rozmytych

Jeśli $\alpha > 0$ oraz α mnożone przez wysokość zbioru A nie jest większe od 1, wówczas

$$\mu_{\alpha A}(u) = \alpha \mu_A(u)$$

Za szczególne przypadki potęgowania uważa się operacje koncentracji i rozpraszania:

$$CON(A) = A^2$$

$$DIL(A) = A^{\frac{1}{2}}$$

Iloczyn kartezjański zbioru A z przestrzeni U i zbioru B z przestrzeni V określa się następująco:

$$\mu_{A \times B} = \min_{U \times V} (\mu_A(u), \mu_B(v))$$



Liczbą rozmytą L określa się wypukły i znormalizowany zbiór rozmyty z przestrzeni R taki, że

- 1) istnieje dokładnie jedno $x_o \in R$, dla którego $\mu_L(x_o) = 1$, a x_o nazywane jest *średnią wartością* L ,
- 2) funkcja μ_L jest ciągła, ściślej - półciągła z góry.

Przykładowymi rozmytymi liczbami są:

$$\text{około } 2 = L_1, \mu_{L_1}(x) = \frac{1}{1+|2-x|}$$

$$\text{około } 5 = L_2, \mu_{L_2}(x) = \frac{1}{1+|5-x|}$$



Niech dane będą przestrzenie obiektów U_1, U_2, \dots, U_n .
Rozmytą n -elementową relacją R nazywamy zbiór rozmyty z przestrzeni będącej iloczynem kartezyjskim
 $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$, co można zapisać

$$R = \{((u_1, u_2, \dots, u_n), \mu_R(u_1, u_2, \dots, u_n) | u_i \in U_i, i = 1, 2, \dots, n)\}$$



Przykładowe relacje rozmyte

Relacja SZYBKIE

u_1	μ
0	0
20	0.02
40	0.1
60	0.8
80	0.9
100	1

Relacja NIEBEZP

u_1	μ
0	0
20	0.1
40	0.2
60	0.7
80	1
100	1

Relacja $\overline{\text{NIEBEZP}}$

u_1	μ
0	1
20	0.9
40	0.8
60	0.3
80	0
100	0



Niech q będzie ciągiem indeksów (i_1, \dots, i_k) , natomiast q' uzupełnieniem q do ciągu $(1, \dots, n)$ np. $q = (1, 4, 5)$ w ciągu $(1, 2, 3, 4, 5)$, zaś $q' = (2, 3)$.

Rzutem (ang. *projection*) n -elementowej relacji rozmytej R na $U_S = U_{i_1} \times U_{i_2} \times \dots \times U_{i_k}$ nazywa się k -elementową relację rozmytą o postaci

$$\left\{ \left((u_{i_1}, \dots, u_{i_k}), \sup_{u_{i_{k+1}}, u_{i_{k+2}}, \dots, u_{i_n}} \mu_R(u_1, \dots, u_n) \right) \mid (u_{i_1}, \dots, u_{i_k}) \in U_S \right\},$$

gdzie \sup oznacza najmniejsze górne ograniczenie. Jeśli przestrzenie obiektów U_1, U_2, \dots, U_n są ograniczone, wówczas \sup może być zastąpione przez \max . Operację rzutowania oznacza się przez $Proj_{U_S}(R)$.



Przykłady rzutów relacji

Relacja WIĘKSZE_NIŻ

$u_1 \backslash u_2$	0	20	40	60	80	100
0	0	0.2	0.4	0.7	0.9	1
20	0	0	0.2	0.4	0.7	0.8
40	0	0	0	0.2	0.4	0.6
60	0	0	0	0	0.2	0.4
80	0	0	0	0	0	0.2
100	0	0	0	0	0	0

Rzut relacji WIĘKSZE_NIŻ na u_1

u_1	μ
0	1
20	0.8
40	0.6
60	0.4
80	0.2
100	0

Rzut relacji WIĘKSZE_NIŻ na u_2

u_2	0	20	40	60	80	100
μ	0	0.2	0.4	0.7	0.9	1



Rozszerzenie cylindryczne relacji rozmytej

Niech $R(q)$ będzie k -elementową rozmytą relacją na $U_q = U_{i_1} \times U_{i_2} \times \dots \times U_{i_k}$. *Rozszerzeniem cylindrycznym* relacji $R(q)$ (z U_q) na $U = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ nazywa się n -elementową relację $c(R(q))$ określoną następująco

$$c(R(q)) = \{(u_1, u_2, \dots, u_n), \mu(u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_k}) \mid (U_1, U_2, \dots, U_n) \in U\}$$



Przykład rozszerzenia cylindrycznego relacji

Relacja SZYBKIE

u_1	μ
0	0
20	0.02
40	0.1
60	0.8
80	0.9
100	1

Rozszerzenie cylindryczne relacji SZYBKIE na u_2

$u_1 \setminus u_2$	0	20	40	60	80	100
0	0	0	0	0	0	0
20	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
40	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
60	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
80	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9
100	1	1	1	1	1	1



Połączenie relacji rozmytych

Niech R będzie r -elementową rozmytą relacją na $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_r$ oraz S ($n - s + 1$)-elementową relacją na $U_s \times U_{s+1} \times \dots \times U_n$, gdzie $1 \leq s \leq r \leq n$. *Połączenie* (ang. *join*) R oraz S jest definiowane jako przecięcie:

$$c(R) \cap c(S),$$

gdzie $c(R)$ oraz $c(S)$ są rozszerzeniami cylindrycznymi R i S na $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$.

Przecięcie rozumiane jest jako $\min(c(R), c(S))$. W tym przypadku brane jest minimum przy porównaniu macierzy.



Kompozycja (złożenie) relacji rozmytych

Niech R będzie r -elementową relacją rozmytą na $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_r$ oraz S będzie $(n - s + 1)$ -elementową relacją rozmytą na $U_s \times U_{s+1} \times \dots \times U_n$, gdzie $1 \leq s \leq n$. Niech $(\{1, 2, \dots, r\} - \{s, s+1, \dots, n\}) = (\{s, s+1, \dots, n\} - \{1, 2, \dots, r\})$ będzie oznaczone przez $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ i nazwane różnicą symetryczną $\{1, 2, \dots, r\}$ oraz $\{s, s+1, \dots, n\}$. **Złożeniem** (ang. *composition*) dwóch relacji R oraz S oznaczonym przez $R \circ S$ będzie następująca relacja rozmyta:

$$Proj_{(U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_k})}(c(R) \cap c(S)),$$

która jest rzutem połączenia $c(R)$ oraz $c(S)$ na $U_{i_1} \times U_{i_2} \times \dots \times U_{i_k}$.

Interesujące jest rozważenie dwóch przypadków szczególnych:

1) dla $r = 1 = s$ oraz $n = 2$. Złożenie $R \circ S$ może być liczone w następujący sposób:

$$R \circ S = \{(u_2, \sup_{u_1} \min(\mu_R(u_1), \mu_S(u_1, u_2))) | u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$$

2) dla $r = 2 = s$ oraz $n = 3$. Złożenie $R \circ S$ można zapisać:

$$R \circ S = \{((u_1, u_3), \sup_{u_2} \min(\mu_R(u_1, u_2), \mu_S(u_2, u_3))) | u_1 \in U_1, u_2 \in U_2, u_3 \in U_3\}$$



Złożenie SZYBKIE \circ WIĘKSZE_NIŻ

Relacja SZYBKIE

u_1	μ
0	0
20	0.02
40	0.1
60	0.8
80	0.9
100	1

Relacja WIĘKSZE_NIŻ

$u_1 \backslash u_2$	0	20	40	60	80	100
0	0	0.2	0.4	0.7	0.9	1
20	0	0	0.2	0.4	0.7	0.8
40	0	0	0	0.2	0.4	0.6
60	0	0	0	0	0.2	0.4
80	0	0	0	0	0	0.2
100	0	0	0	0	0	0

Relacja SZYBKIE \circ WIĘKSZE_NIŻ

u_2	μ
0	0
20	0
40	0.02
60	0.1
80	0.2
100	0.4

$$\begin{aligned} \mu_{\text{SZYBKIE} \circ \text{WIĘKSZE_NIŻ}}(80) &= \max_{\mu_1} \min(\mu_{\text{SZYBKIE}}(u_1) \circ \mu_{\text{WIĘKSZE_NIŻ}}(u_1, 80)) = \\ &= \max(\min(\mu_{\text{SZYBKIE}}(0), \mu_{\text{WIĘKSZE_NIŻ}}(0, 80)), \min(\mu_{\text{SZYBKIE}}(20), \mu_{\text{WIĘKSZE_NIŻ}}(20, 80)), \\ &, \min(\mu_{\text{SZYBKIE}}(40), \mu_{\text{WIĘKSZE_NIŻ}}(40, 80)), \min(\mu_{\text{SZYBKIE}}(60), \mu_{\text{WIĘKSZE_NIŻ}}(60, 80)), \\ &, \min(\mu_{\text{SZYBKIE}}(80), \mu_{\text{WIĘKSZE_NIŻ}}(80, 80)), \min(\mu_{\text{SZYBKIE}}(100), \mu_{\text{WIĘKSZE_NIŻ}}(100, 80))) \\ &= \max(\min(0, 0.9), \min(0.02, 0.7), \min(0.1, 0.4), \min(0.8, 0.2), \min(0.9, 0), \min(1, 0)) = \\ &= \max(0, 0.02, 0.1, 0.2, 0, 0) = 0.2 \end{aligned}$$



Złożenie WIĘKSZE_NIŻ \circ WIĘKSZE_NIŻ

Relacja WIĘKSZE_NIŻ

$u_1 \setminus u_2$	0	20	40	60	80	100
0	0	0.2	0.4	0.7	0.9	1
20	0	0	0.2	0.4	0.7	0.8
40	0	0	0	0.2	0.4	0.6
60	0	0	0	0	0.2	0.4
80	0	0	0	0	0	0.2
100	0	0	0	0	0	0

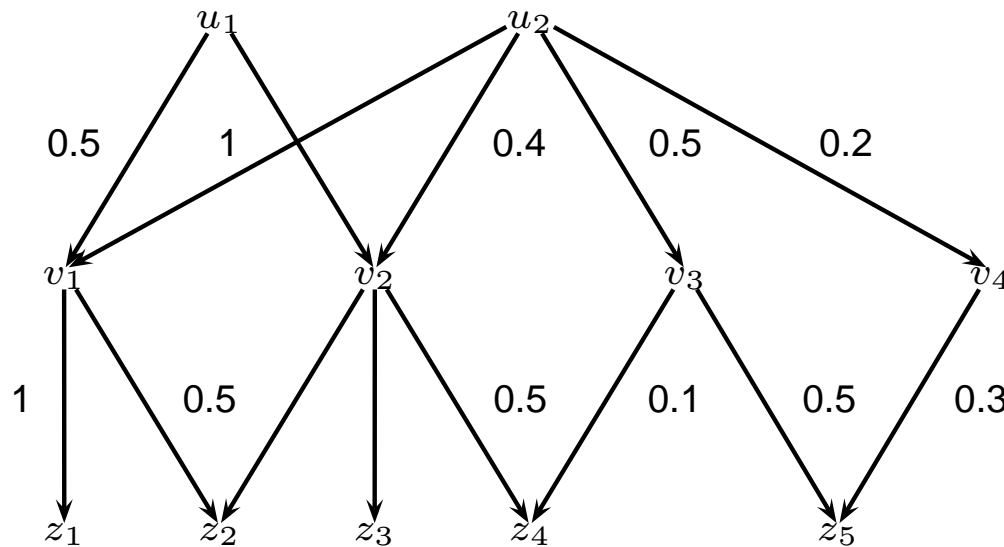
Relacja WIĘKSZE_NIŻ \circ WIĘKSZE_NIŻ

$u_1 \setminus u_2$	0	20	40	60	80	100
0	0	0	0.2	0.2	0.4	0.4
20	0	0	0	0.2	0.2	0.4
40	0	0	0	0	0.2	0.2
60	0	0	0	0	0	0.2
80	0	0	0	0	0	0
100	0	0	0	0	0	0

$$\begin{aligned}
 \mu_{\text{WIĘKSZE_NIŻ} \circ \text{WIĘKSZE_NIŻ}}(0, 80) &= \max_{\mu_2} \min(\mu_{\text{WIĘKSZE_NIŻ}}(0, u_2) \circ \mu_{\text{WIĘKSZE_NIŻ}}(u_2, 80)) = \\
 &= \max(\min(\mu_{\text{WIĘKSZE_NIŻ}}(0, 0), \mu_{\text{WIĘKSZE_NIŻ}}(0, 80)), \min(\mu_{\text{WIĘKSZE_NIŻ}}(0, 20), \mu_{\text{WIĘKSZE_NIŻ}}(20, 80)), \\
 &\quad , \min(\mu_{\text{WIĘKSZE_NIŻ}}(0, 40), \mu_{\text{WIĘKSZE_NIŻ}}(40, 80)), \min(\mu_{\text{WIĘKSZE_NIŻ}}(0, 60), \mu_{\text{WIĘKSZE_NIŻ}}(60, 80)), \\
 &\quad , \min(\mu_{\text{WIĘKSZE_NIŻ}}(0, 80), \mu_{\text{WIĘKSZE_NIŻ}}(80, 80)), \min(\mu_{\text{WIĘKSZE_NIŻ}}(0, 100), \mu_{\text{WIĘKSZE_NIŻ}}(100, 80))) \\
 &= \max(\min(0, 0.9), \min(0.2, 0.7), \min(0.4, 0.4), \min(0.7, 0.2), \min(0.9, 0), \min(1, 0)) = \\
 &= \max(0, 0.2, 0.4, 0.2, 0, 0) = 0.4
 \end{aligned}$$



Przykład z relacjami rozmytymi



Rozmyty graf G jako zbiór rozmyty w przestrzeni $A \times A$.

$\mu_G(a_i, a_j)$ to stopień możliwości połączenia.

W grafie z części składowych U, V, Z wyznaczamy możliwe przejścia:

$G_1 = U \times V, G_2 = V \times Z$.

Stopień możliwości przejścia z U do Z przez złożenie $G_1 \circ G_2$.

$u \setminus v$	v_1	v_2	v_3	v_4
u_1	0.5	0.2	0	0
u_2	1	0.4	0.5	0.2

$v \setminus z$	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
v_1	1	0.5	0	0	0
v_2	0	1	0.2	0.5	0
v_3	0	0	0	0.1	0.5
v_4	0	0	0	0	0.3

$u \setminus z$	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
u_1	0.5	0.5	0.2	0.2	0
u_2	1	0.5	0.2	0.4	0.5

