1. Ile jest permutacji słowa KOMBINATORYKA w których przynajmniej jedna z grup liter występujących więcej niż jeden raz w tym słowie stoi obok siebie.

Powtarzają się litery A, O, K; każda po dwa razy.
Wprowadzam oznaczenie R_X jako zbiór permutacji, w którym obie litery X są koło siebie.
Żeby obliczyć ilość elementów takiego zbioru, trzrba liczyć normalne permutacje tylko takie, gdzie obie te litery stanowią jeden obiekt.
Całe słowo ma 13 liter.
$|R_A| = |R_K| = |R_O| = 12!$
Podobnie $|R_A \cap R_K| = |R_O \cap R_K| = |R_A \cap R_O| = 11!$
oraz $|R_A \cap R_K \cap R_O| = 10!$
Z zasady włączania-wyłączania
$|R_A \cup R_K \cup R_O| = |R_A| + |R_K| + |R_O| - |R_A \cap R_K| - |R_A \cap R_O| - |R_K \cap R_O| + |R_A \cap R_K \cap R_O| =$
$3*12!-3*11!+10! = 3*12*11*10!-3*11*10!+10! = 10!*(3*12*11-3*11+1) = 10!*364 =$
$2*3*4*5*6*7*8*9*10*364$

2. W turnieju wzięło udział 8 szablistów. Rozegrano pewną liczbę pojedynków w których żadna para przeciwników nie wystąpiła więcej niż jeden raz. Należy wykazać że bez względu na liczbę rozegranych pojedynków wśród zawodników jest co najmniej 2 takich którzy rozegrali tyle samo pojedynków.

Wprowadzamy relację „aRb == a bił się z b”. Relacja jest symetryczna (jeśli a bił się z b, to b z a też), nie jest natomiast zwrotna na żadnym niepustym podzbiorze „zbioru szablistów” (czyli nikt nie bił się sam ze sobą).

Teraz: jeżeli każdy bił się co najmniej raz, to mógł mieć co najmniej 1, co najwyżej 7 przeciwników. Ponieważ zawodników jest ośmiu, a dostępnych liczb przeciwników tylko siedem, z „zasady szufladkowej” wiemy, że któraś musiała się powtórzyć.

Jeśli któryś z zawodników (tylko jeden!) nie brał udziału w żadnej walce, to pozostałych jest 7, dostępnych liczb przeciwników dla każdego 6, więc tak samo z zasady szufladkowej, któraś się powtarza.

Jeżeli co najmniej dwu zawodników nie walczyło ani razu to właśnie oni rozegrali tę samą liczbę pojedynków (0).

3. W pewnym klubie piłkarskim trenuje 19 graczy w polu. Klub planuje rozgrywki ligowe w sezonie w którym musi rozegrać 16 meczy z innymi klubami. Na ile sposobów można zaplanować rozgrywki w tym sezonie jeśli w każdym meczu trzeba wystawić reprezentację 4 graczy w polu.

Każdy taki plan rozgrywek jest przypisaniem składu zawodników do każdego meczu. Oznacza to, że zliczane będą funkcje ze zbioru meczów w zbiór składów (dowolne funkcje, ponieważ ten sam skład może grać wiele razy). Meczów jest 16.

Skład to jest 4 graczy z 19-osobowej drużyny, czyli 4-elementowy podzbiór 19-elementowego zespołu, czyli składów jest $\binom{19}{4} = \frac{19!}{4!*15!} = \frac{16*17*18*19}{2*3*4} = 4*17*3*19$.

Razem więc możliwych planów rozgrywek jest $(3*4*17*19)^{16}$.

4. Na ile sposobów można rozdzielić 5 ponumerowanych procesów pomiędzy 3 jednakowe procesory tak aby żadne z procesorów nie był obciążony więcej jak 2 procesami. Rozdzielić trzeba wszystkie procesy, żaden z procesorów nie może pozostać bezczynny i każdy proces będzie w całości wykonywany na 1 procesorze.

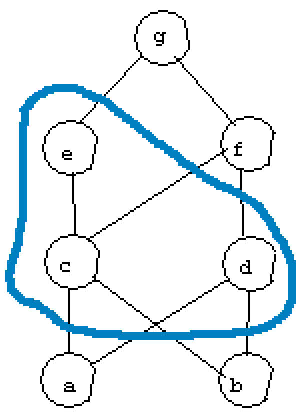
Procesy są ponumerowane, procesory nie są. Modelem będzie więc podział zbioru na bloki (ale nie do końca). Wszystkich możliwych podziałów 5-elementowego zbioru na 3 bloki jest $\left\{ {5 \atop 3} \right\}$=25. (Wylicza się z wzoru rekurencyjnego na „ściągawce”.) To jest jednak za dużo, trzeba wyeliminować te podziały, w których istnieją bloki większe niz 2 elementy. Wszystkie takie podziały są na jeden blok 3-elementowy i dwa 1-elementowe a każdy taki podział jest wyznaczony przez ten 3-elementowy blok. Oznacza to, że „zakazanych podziałów” jest tyle, ile 3-elementowych podzbiorów zbioru 5-elementowego, czyli $\binom{5}{3} = 10$.

Czyli wynika z tego, że podziałów dopuszczonych przez zadanie jest 25-10=15.

5. Diagram Hassego
- zbiór ograniczeń górnych i dolnych zbioru A={c,d,e}
- kres dolny i górny zb. A …

	a	b	c	d	e	f	g
a	1						
b		1					
c	1	1	1				
d	1	1		1			
e	1	1	1	1	1		
f	1	1	1			1	
g	1	1	1	1	1	1	1

Diagram Hassego:



Ograniczenia górne zb. A: {g}

Ograniczenia dolne zb. A: {a,b}
sup A = g
inf A nie istnieje.

6. Ile jest nieujemnych i całkowitych rozwiązań nierówności: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 7$
x_1-nieparzyste, $x_2 \in \{0,1\}$, x_3 - parzyste, $x_4 \leq 1$, $2 \leq x_5 \leq 3$
Funkcja tworząca

Problem jest równoważny dla wyboru podzbiorów ze zbioru z powtórzeniami, w którym każdy z elementów powtarza się co najmniej 7 razy a wybieramy najwyżej 7-elementowe podzbiory.
Przy budowaniu funkcji tworzącej trzeba wziąć pod uwagę ograniczenia zadania;
x_1 musi być nieparzyste, więc do funkcji wniesie $(x+x^3+x^5+x^7)$.
Cała funkcja tworząca to będzie:
$(x+x^3+x^5+x^7)(1+x)(1+x^2+x^4+x^6)(1+x)(x^2+x^3)=x^3+3x^4+5x^5+7x^6+9x^7+11x^8+13x^9+15x^{10}+15x^{11}+13x^{12}+11x^{13}+9x^{14}+7x^{15}+5x^{16}+3x^{17}+x^{18}$
Teraz dodajemy współczynniki przy potęgach do 7, czyli 1+3+5+7+9=25.
Czyli poszukiwanych rozwiązań jest 25.

7. Na ile sposobów można zaplanować wykonanie 4 różnych urządzeń na 3 stanowiskach montażowych tak aby żadne nie było bezczynne. Plan musi podawać nr stanowiska dla urządzenia i określać w jakiej kolejności będą montowane.

Z warunków zadania wynika, że przy każdym stanowisku musimy ustawić co najmneiej jedno urządzenie do zmontowania, pierwsze w kolejce do tego urządzenia. Wybrać urządzenia na pierwsze miejsce w kolejce możemy na $\binom{4}{3}$=4 sposoby, każdy z tych wyborów możemy na 3 stanowiska rozstawić na 3! sposobów, razem więc będzie 3!*4=24 sposoby.
Pozostałe jedno urządzenie musimy dodać na drugie miejsce w kolejce przy którymś urządzeniu, co możemy zrobić na 3 sposoby, razem 24*3=72.
Oznacza to, że dopuszczalnych planów produkcji jest 72.

8. Na ile sposobów można ułożyć w ciąg 3 jednakowe kule zielone, 5 jednakowych kul czerwonych i 4 kule ponumerowane.

Wszystkich kul jest razem 12, czyli możemy ułożyć je na 12! sposobów. Ponieważ jednak 3 kule zielone i 5 czerwonych są nierozróżnialne, to 3!*5! sposobów (te, między którymi przestawiamy tylko kule tego samego koloru między sobą) są nierozróżnialne. Razem to daje:
$\frac{12!}{3!*5!} = \frac{6*7*8*9*10*11*12}{2*3} = 7*8*9*10*11*12$ sposobów.

9. Na ile sposobów można obdarować 7 dzieci 30 cukierkami tak aby rozdać wszystkie cukierki, nie pozostawić żadnego dziecka bez cukierków i zapewnić każdemu dziecku parzystą liczbę cukierków.

Ponieważ każde dziecko ma dostać parzystą liczbę cukierków, tak naprawdę nie rozdajemy 30 cukierków tylko 15 par cukierków. Czyli szukamy rozwiązania równania diofantycznego $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7=15$. Ale trzeba pamiętać, że każde dziecko ma dostać cukierki, czyli

każdy x_i musi być dodatni. Żeby sprowadzić to do normalnego równania diofantycznego, zamiast x_i wstawiamy więc y_i+1. Otrzymujemy:
$y_1+1+y_2+1+y_3+1+y_4+1+y_5+1+y_6+1+y_7+1=15$, po odjęciu stronami 7:
$y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7=8$
Rozwiązań takiego równania jest

$$\binom{7+8-1}{8} = \binom{14}{8} = \frac{14!}{8!*6!} = \frac{9*10*11*12*13*14}{2*3*4*5*6} = 3*7*11*13$$

10. W biegu bierze udział 5 zawodników ponumerowanych od 1 do 5. Na ile sposobów może zakończyć się ten bieg tak aby żaden z zawodników nie zajął miejsca zgodnego ze swoim numerem.

Jest to po prostu pytanie o liczbę $|D_5|$ nieporządków nad zbiorem pięcioelementowym. Po przeliczeniu z wzoru ze „ściągawki” wychodzi 44.