

WYKŁAD 14

- **Informacja obrazowa**
- **Ukrywanie informacji w obrazie (Steganografia)**
- **Transformaty w przetwarzaniu obrazów**

Informacja obrazowa

Informacja obrazowa określa **istotność** danych obrazowych.

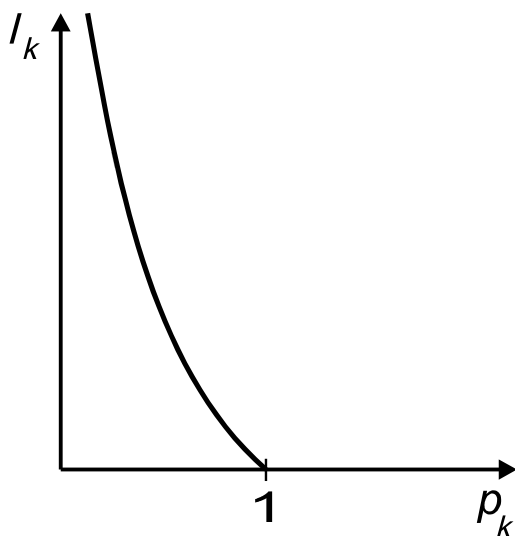
W praktyce **zawartość** informacji w danych obrazowych na ogół trudno zmierzyć w obiektywny sposób; jest ona zależna od:

- **celów**, jakim służy (np. jednolita jasność pola testowego suchego testu w diagnozowaniu stanowi dużą informację),
- **kto** wydaje na jej podstawie decyzje (np. poprzednia wiedza, intuicja).

Podójście obiektywne:

Zakładamy **źródło** (np. obraz) generujące dyskretny zbiór **niezależnych wiadomości** (np. wartość piksla) (r_k), z prawdopodobieństwem p_k każda, gdzie: $k=1,2,3,\dots,L$, L - liczba możliwych wiadomości (np. wartości piksla).

Informacja związana z wiadomością r_k (wnoszona przez wiadomość r_k) jest definiowana jako:



$$I_k = -\log_2 p_k \quad [\text{bitów}]$$

gdzie:

$$\sum_{k=1}^L p_k = 1,$$

$$p_k \leq 1, \quad I_k \geq 0$$

p_k - prawdopodobieństwo wystąpienia wiadomości $r_k \quad k=1,2,3,\dots,L$

Ze wzoru i z wykresu widać, że pozyskiwana **informacja jest duża**, gdy generowana jest **mało spodziewana** wiadomość (małe p_k).

Entropia – jest to *średnia informacja* generowana przez źródło:

$$H = - \sum_{k=1}^L p_k \log_2 p_k \quad \left[\frac{\text{bitów}}{\text{wiadomość}} \right]$$

W obrazie cyfrowym traktowanym jako źródło **niezależnych** pikseli - entropia H może być szacowana z **histogramu** tego obrazu. Wysokość k -tego słupka histogramu jest proporcjonalna zarówno do liczby pikseli o k -tym poziomie jasności jak i do prawdopodobieństwa p_k pojawienia się piksela o tym poziomie.

Jak widać z powyższego wzoru, dla zadanego L entropia źródła jest **maksymalna** dla **rozkładu jednostajnego** prawdopodobieństw p_k tzn. gdy spełnione jest:

$$p_k = \frac{1}{L} \quad k=1, \dots, L$$

Wtedy:

$$\max_{p_k} H = - \sum_{k=1}^L \frac{1}{L} \log_2 \frac{1}{L} = \log_2 L \quad \left[\frac{\text{bitów}}{\text{wiadomość}} \right]$$

Z tego punktu widzenia **maksymalną informację** wnosi obraz, który jest podzielony na tyle podzbiorów pikseli, ile występuje poziomów jasności, przy czym muszą być spełnione następujące warunki:

- wszystkie piksele każdego z podzbiorów są tej samej wartości,
- niemożliwe jest utworzenie zbioru, z dwóch dowolnych zdefiniowanych w poprzednim punkcie podzbiorów, takiego aby wszystkie jego piksele miały taką samą wartość.

Entropia maksymalna określa **dolną granicę** (ograniczenie) na liczbę bitów **wymaganych** do zakodowania tego źródła.

Oczywiście, przy wykluczeniu możliwości pojawienia się rozkładu jednostajnego p_k zdefiniowana powyżej liczba bitów maleje.

Przykład:

Niech liczba wszystkich możliwych wartości piksla wynosi: $L = 256$.

Wtedy:

$$\max_{p_k} H = \log_2 L \left[\frac{\text{bitów}}{\text{wiadomość}} \right] = \log_2 256 = 8 \text{ [bit / piksel]}$$

Oznacza to, że liczba bitów **wymagana** do zakodowania tego piksla wynosi **niemniej** niż 8

Twierdzenie Shannona o kodowaniu

1 postać:

możliwe jest zakodowanie bez zniekształceń źródła o entropii H bitów używając średnio $H + \varepsilon$ bitów/wiadomość, gdzie $\varepsilon > 0$ jest dowolnie małe.

2 postać:

można zakodować źródło o H bitach w ten sposób, że zniekształcenie dekodowanej wiadomości jest dowolnie małe.

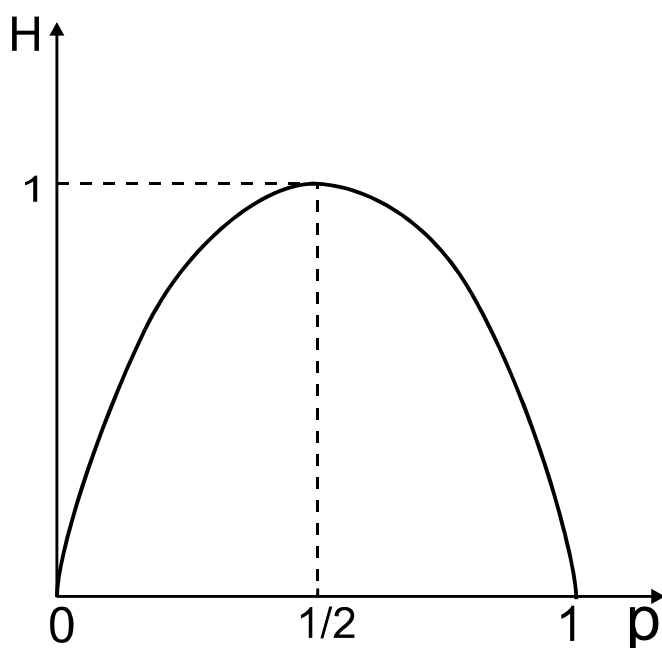
Przykład:

Niech będzie **źródło binarne** tzn. $L=2$

Wtedy: jeśli $p_1 = p$, to $p_2 = 1 - p$, gdzie $0 \leq p \leq 1$

Zgodnie z podanym wcześniej wzorem entropia wynosi:

$$H = H(p) = p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p)$$



Ze wzorów i z wykresu widać, że **entropia maksymalna** wynosi 1 bit, co zachodzi, gdy obie wiadomości są **jednakowo prawdopodobne**, co odpowiada **rozkładowi jednostajnemu** p_k .

Ponieważ źródło jest **binarne**, zawsze można zakodować wyjście używając 1 bit/wiadomość.

Jeśli zaś $p < 1/2$ np. $p = 1/8$, wtedy $H < 0,2$ bitów, a z twierdzenia Shannona wynika, że w tym wypadku **można znaleźć sposób zakodowania wymagający tylko 0,2 bita/wiadomość**.

Piksel jako wiadomość a obraz jako wiadomość

Oznaczenia: B - liczba bitów na piksel
 $N \times N$ - rozmiar obrazu.

- Piksel jako wiadomość

Liczba wiadomości r_k : $L = 2^B$

np. dla $B=8$ i $N=512$ $L=2^8=256$

Entropia maksymalna : $\max H = \log_2 2^8 = 8$ bitów

- Obraz jako wiadomość

Liczba wiadomości r_k : $L = 2^{B(N \cdot N)}$

np. dla $B=8$ i $N=512$ $L = 2^{8(512 \cdot 512)} \cong 10^{600}$

Entropia maksymalna : $\max H = \log_2 2^{8 \times 512 \times 512} = 8 \times 512 \times 512$ bitów

- **Steganografia (*steganography*)**

Ukrywanie informacji (*information hiding*), hermetyzacja, przesłanie informacji

Zaleta steganografii w stosunku do szyfrowania: ukrycie samego faktu porozumiewania się stron.

Ukrywanie informacji obrazowej (lub tekstowej) w obrazie
(*steganography, image watermarking*)

Przykładowe cele:

- przesłanie i odczyt ukrytego obrazu,
- ochrona praw autorskich (ukryty obraz (lub tekst) pełni rolę znaku wodnego (*watermark*)), w tym przypadku konieczną własnością obrazu ukrytego jest (poza odpornością na usunięcie przez czynniki zewnętrzne) jego wystarczająca **odporność** na działanie standardowych operacji przetwarzania obrazów (filtracja, kompresja, zniekształcenia geometryczne itp.),
- ochrona autentyczności obrazu (ukryty obraz pełni rolę znaku wodnego (*watermark*)), w tym przypadku konieczną własnością obrazu ukrytego jest (poza odpornością na usunięcie przez czynniki zewnętrzne) jego wystarczająca **podatność** na działanie operacji przetwarzania obrazów (filtracja, kompresja, zniekształcenia geometryczne itp.).

Ukrywanie obrazu w obrazie - nazwy obrazów

1. obraz ukrywający [**p**]
2. obraz ukrywany [**h**]
3. obraz ukrywany po przekształceniu [**hmod**]
4. obraz ukrywający wraz z obrazem ukrytym [**ph**]

Obrazy ukrywające z gradacją poziomów szarości

Obraz ukrywający: na 1 piksel obrazu przypada 1 bajt (8 bitów)

Obraz ukrywany: na 1 piksel obrazu może przypadać 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 bitów, co odpowiada 2,4,8,16,32,64,128,256 poziomom szarości (M)

W praktyce, ze względu na potrzebę ograniczenia wpływu obrazu ukrywanego na wygląd obrazu ukrywającego, stosowane są wartości $M < 256$ a obraz ukrywany zapisywany jest na najmniej znaczących bitach obrazu ukrywającego. Przy wzroście wartości M następuje coraz większa zmiana wyglądu obrazu ukrywającego i jednocześnie coraz wyraźniejsze uwidocznienie obrazu ukrywanego w tym obrazie.

Obrazy ukrywające kolorowe np. w formacie RGB

Obraz ukrywający: na 1 piksel obrazu przypada 3 bajty (24 bity) odpowiadające 3 składowym R, G, B

Przykładowy zapis piksela obrazu ukrywanego: 2 najmłodsze bity składowej R oraz po jednym najmłodszym bicie składowych G i B (razem 4 bity, co odpowiada obrazowi o $M=16$ poziomach)

Zapis informacji tekstowej obrazie RGB: 1 znak – 8 bitów co oznacza że do zapisu 1 znaku można wykorzystać 2 piksle.

Dodatkowe kodowanie obrazów ukrywanych => lepsze ich ukrycie

(np. przemieszanie poszczególnych piksli)

Operacje najczęściej stosowane w procesie ukrywania i odtwarzania obrazu

- **Jednopunktowe jednoargumentowe**
 - progowania, redukcji poziomów szarości, rozciągania, uniwersalne operacje punktowe (UOP)
- **Jednopunktowe dwuargumentowe**
 - arytmetyczne (dodawanie, odejmowanie)
 - logiczne (suma (OR), iloczyn (AND))

• Przykłady:

Przykład 1

Ile znaków 8-bitowych można ukryć w mapie bitowej RGB o rozmiarach $N_1 \times N_2 = 800 \times 600$ zakładając, że w ukryciu tych znaków wykorzystywane są 2 najmłodsze bity składowej R oraz po jednym najmłodszym bicie składowych G i B. Na każdą ze składowych R, G, B przypada po 8 bitów.

Rozwiązanie:

1 piksel 4 bity znaku 8-bitowego

2 piksele – 1 znak

Liczba pikseli: $N_1 \times N_2 = 800 \times 600 = 480000$

Liczba znaków: $480000 / 2 = 240000$

Odpowiedź: W mapie bitowej użytej w zadaniu można ukryć 240000 znaków 8-bitowych.

Przykład 2

Dany jest obraz ukrywający **[p]** o rozmiarze $N=5$ i o liczbie poziomów szarości $M=16$, $L_{min}=0$ zawierający jasny obiekt i ciemne tło oraz obraz **[h]** o takich samych rozmiarach zawierający także jasny obiekt i ciemne tło.

Przeprowadzić następujące czynności:

1. Ukryć obraz **[h]** w **[p]** wykorzystując jego najmniej znaczący bit i uzyskując w efekcie obraz ukrywający zmodyfikowany **[ph]**
2. Wyznaczyć obraz różnicy **[r]** pomiędzy między obrazem **[ph]** a **[p]** stosując odpowiednią operację jednopunktową dwuargumentową.
3. Odtworzyć obraz **[h]** ukryty w **[p]**

Rozwiązanie

Obraz ukrywający **[p]**

0	0	0	1	0
1	1	15	14	0
1	0	15	13	2
2	1	0	14	0
1	0	0	0	0

0000	0000	0000	0001	0000
0001	0001	1111	1110	0000
0001	0000	1111	1101	0010
0010	0001	0000	1110	0000
0001	0000	0000	0000	0000

Obraz ukrywany [h]

0	0	0	0	0
0	0	15	15	0
0	0	15	15	0
0	0	0	15	0
0	0	0	0	0

0000	0000	0000	0000	0000
0000	0000	1111	1111	0000
0000	0000	1111	1111	0000
0000	0000	0000	1111	0000
0000	0000	0000	0000	0000

1. Przekształcenie obrazu [h] na postać pozwalającą na ukrycie go w obrazie [p]

Obraz ukrywany po przekształceniu: [hmod]. Do przekształcenia zastosowano operator progowania.

Opis matematyczny: $hmod = 0$ dla $h < 15$; $hmod = 1$ dla $h \geq 15$

Interpretacja geometryczna.....

Tablica LUT:.....

[hmod]

0000	0000	0000	0000	0000
0000	0000	0001	0001	0000
0000	0000	0001	0001	0000
0000	0000	0000	0001	0000
0000	0000	0000	0000	0000

0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	0	1	1	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	0

2. Przekształcenie obrazu **[p]** na postać pozwalającą na ukrycie w nim obrazu **[h]**.

Obraz ukrywający po przekształceniu: **[pmod]**. Do przekształcenia zastosowano operator iloczynu logicznego (AND)

Obraz pomocniczy: **[m1]** = **[14]** o rozmiarze N=5

$$[pmod] = [p] \cap [m1]$$

[p]

0	0	0	1	0
1	1	15	14	0
1	0	15	13	2
2	1	0	14	0
1	0	0	0	0

[pmod]

0	0	0	0	0
0	0	14	14	0
0	0	14	12	2
2	0	0	14	0
0	0	0	0	0

3. Proces zapisu obrazu **[hmod]** na najmniej znaczących bitach obrazu **[pmod]**. Zastosowano operator sumy logicznej (OR)

$$[ph] = [pmod] \cup [hmod]$$

0	0	0	0	0
0	0	15	15	0
0	0	15	13	2
2	0	0	15	0
0	0	0	0	0

Obraz różnicy: $[r] = | [p] - [ph] |$

0	0	0	1	0
1	1	0	1	0
1	0	0	0	0
0	1	0	1	0
0	0	0	0	0

4. Odczyt obrazu $[hmod]$ z obrazu $[ph]$. Do przekształcenia zastosowano operator iloczynu logicznego (AND).

Obraz pomocniczy: $[m2] = [1]$ o rozmiarze $N=5$

$$[hmod] = [ph] \cap [m2]$$

$[ph]$

0	0	0	0	0
0	0	15	15	0
0	0	15	13	2
2	0	0	15	0
0	0	0	0	0

$[m2]$

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

5. Odtworzenie obrazu $[h]$ na podstawie $[hmod]$. Do przekształcenia zastosowano operator progowania.

Opis matematyczny: $h = 0$ dla $hmod < 1$; $h = 15$ dla $hmod \geq 1$

Interpretacja geometryczna.....

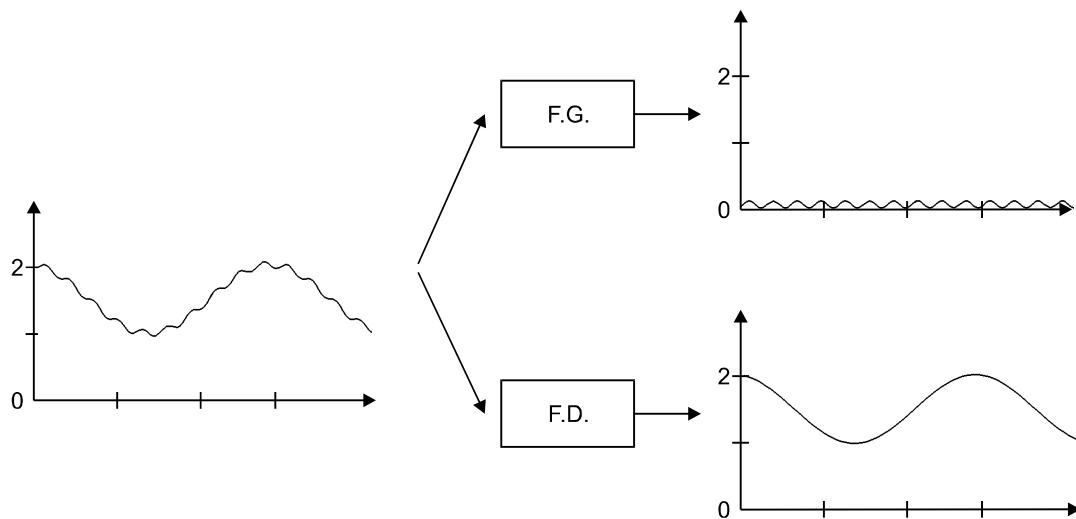
Tablica LUT:.....

Problem:

Ukryć obraz $[h]$ w obrazie $[p]$ w taki sposób, aby obraz $[ph]$ nie różnił się od obrazu $[p]$

- **Transformaty w przetwarzaniu obrazów**

Interpretacja częstotliwościowa filtracji obrazu



FG - filtracja górnoprzepustowa

FD - filtracja dolnoprzepustowa

Transformata

Przekształcenie matematyczne odwracalne i bezstratne, przenoszące sygnał z jednej przestrzeni na inną - taką, w której wygodniej dokonywać pewnych analiz lub kompresji informacji, ponieważ w przestrzeni docelowej uwypuklane są cechy sygnału istotne z punktu widzenia celu.

Transformata Fouriera

Złożoność obliczeniowa:

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \exp\left(\frac{-j2\pi ux}{N}\right) \quad 0(N^2) - \text{tzn. } N^2 \text{ dodawań i mnożeń}$$

gdzie: $u = 0, 1, \dots, N-1, j = \sqrt{-1}$ $0(N * \log_2 N)$ -szybka transformata Fouriera (Fast Fourier Transform (FFT))
(u - argument widma)

Funkcje bazowe- składniki sumy w wyrażeniu opisującym transformatę

Transformata odwrotna:

$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} F(u) \exp\left(\frac{j2\pi ux}{N}\right)$$

gdzie: $x = 0, 1, \dots, N-1$; x - argument funkcji

Dla obszaru $N \times N$:

Dwuwymiarowa transformata Fouriera (TF):

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp\left(\frac{-j2\pi(ux + vy)}{N}\right)$$

gdzie: $u, v = 0, 1, \dots, N-1$; u, v - argumenty widma F

Dwuwymiarowa odwrotna transformata Fouriera (OTF):

$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp\left(\frac{j2\pi(ux + vy)}{N}\right)$$

gdzie: $x, y = 0, 1, \dots, N-1$; x, y - argumenty funkcji f

Duża złożoność obliczeniowa.

Interpretacja:

u, v - interpretuje się jako częstotliwości przestrzenne obrazu $f(x,y)$ odpowiednio wzdłuż osi x, y . Oznacza to, że **drobne** przedmioty i **gwałtowne** przejścia od czerni do bieli widoczne na obrazie są odpowiedzialne głównie za fragmenty funkcji $F(u,v)$ występujące dla **dużych** wartości jej argumentów. Przeciwnie, składowe $F(u,v)$ odpowiadające **małym** wartościom u,v kodują **duże** obiekty lub obszary tła obrazu.

Schemat filtracji:

1. $f(x,y) \xrightarrow{TF} F(u,v)$ ← *funkcja filtru* (usuwanie zakłóceń; na ogół
2. $F'(u,v) = F(u,v) \cdot H(u,v)$ ← *zmodyfikowana funkcja widma*. poj. białe piksele na czarnym tle lub czarne na białym odpowiadające **dużym** częstotli-
3. $F'(u,v) \xrightarrow{OTF} f'(x,y)$ ← *wościom przestrzennym).*

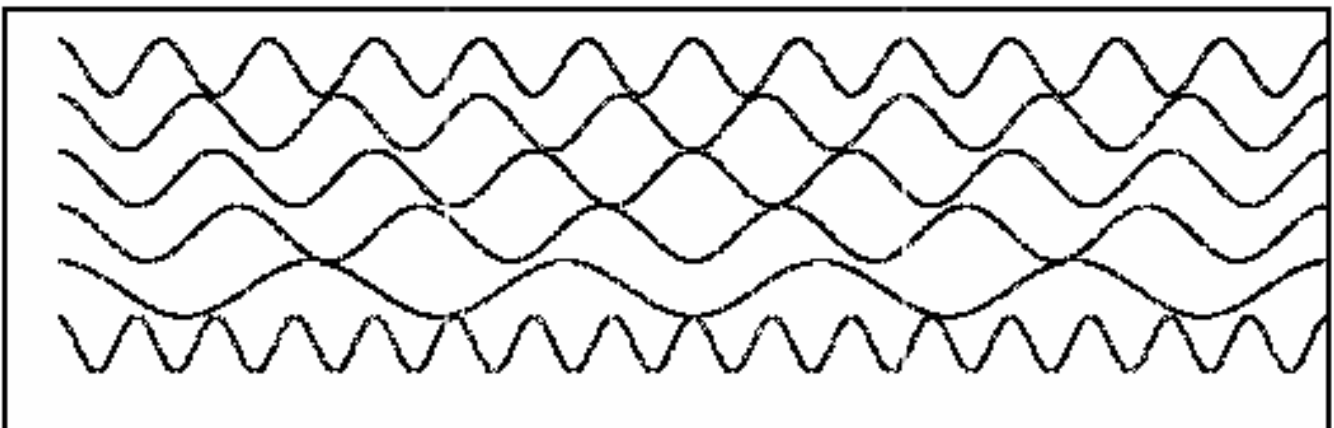
Stąd: $H(u,v)$ realizuje filtrację dolnoprzepustową (FD).

Procesory cyfrowe - FD powolna. Procesory sygnałowe - szybka.

Sprawdzona przydatność FD: eliminacja zakłóceń w sygnałach *jednowymiarowych* typu $f(t)$.

Jednowymiarowa transformata Fouriera

Przedstawienie graficzne funkcji bazowych



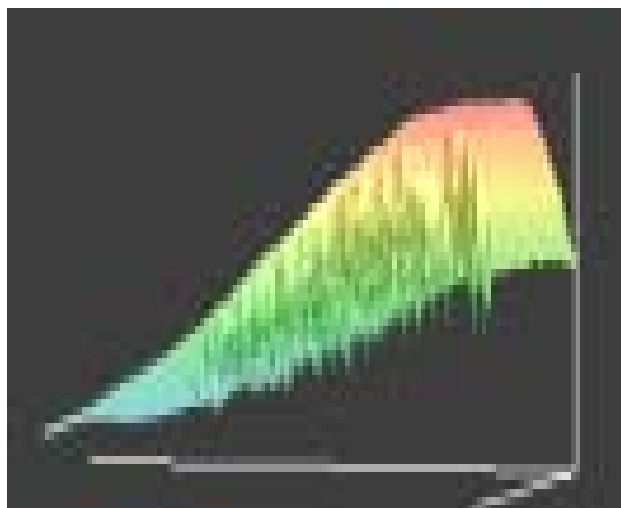
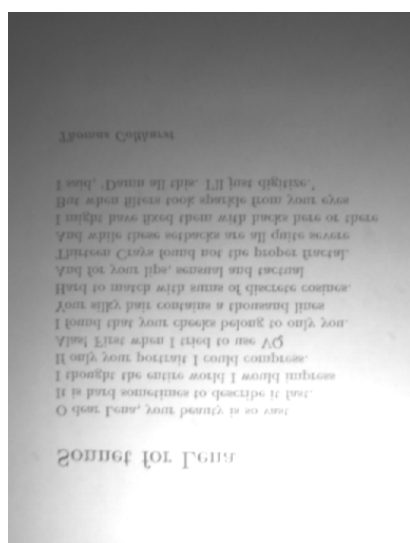
Transformata Fouriera w odniesieniu do obrazu jest operacją **globalną**, to znaczy operacją sąsiedztwa przeprowadzaną na otoczeniu obejmującym wszystkie piksele obrazu.

Np. dla obrazu o wymiarach $N \times N$:

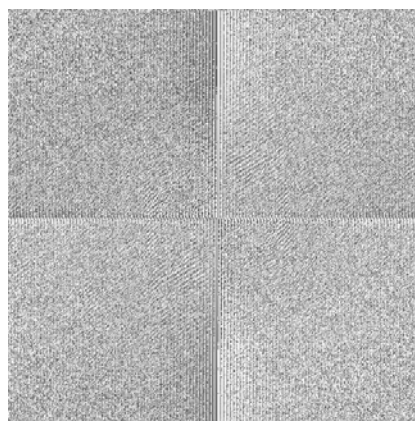
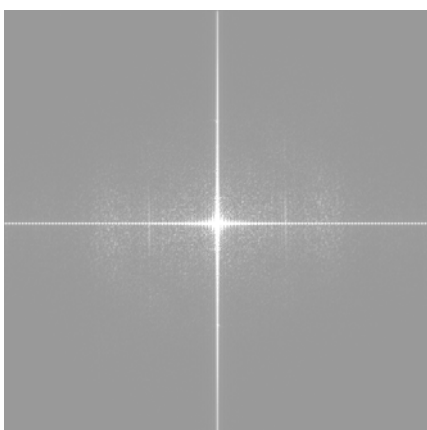
$$[q(i,j)] = P(p(1,1), p(1,2), \dots, p(i,j), \dots, p(N,N))$$

Przykłady

Transformacja Fouriera przenosi obraz (dyskretny sygnał dwuwymiarowy) z dziedziny **przestrzennej** do dziedziny **częstotliwości przestrzennych**.



Dziedzina przestrzenna jest taką dziedziną obrazu, w której odległości między obiektami na obrazie odpowiadają odległościom między odpowiadającymi im obiektami w przestrzeni, którą przedstawia obraz.



W dziedzinie **częstotliwości przestrzennych** wartość w określonej pozycji przedstawia, jaki jest udział częstotliwości zmian poziomów szarości, odpowiadającej pozycji tego punktu w odpowiednim układzie współrzędnych.

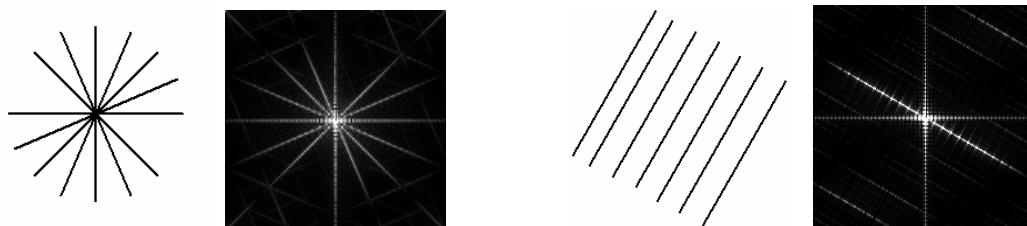
Zastosowania transformaty Fouriera w przetwarzaniu obrazów

- Obserwacja periodyczności w obrazie
- Wyznaczanie kierunku struktur w obrazie
- Wytłumianie lub wzmacnianie pewnych kategorii informacji
- Wygładzanie i wyostanie obrazu

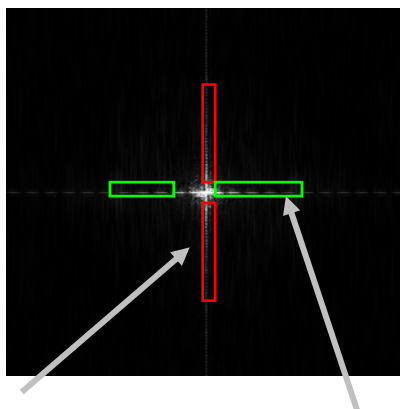
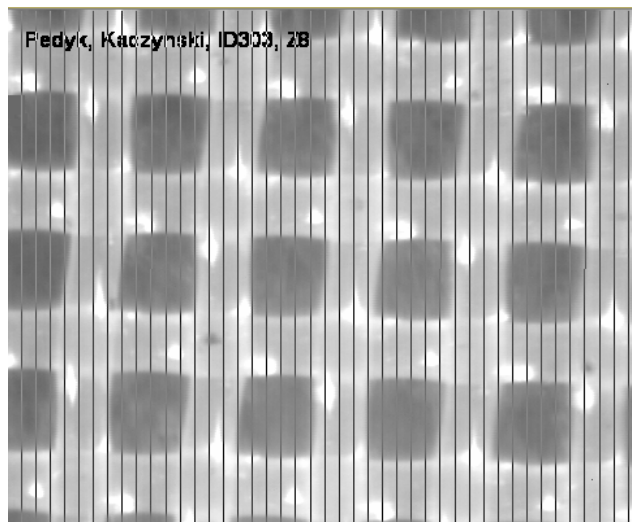
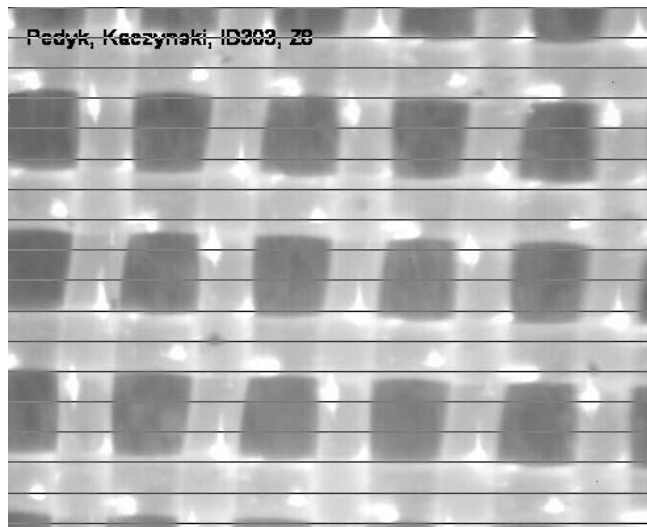
Przykład 1: dwa zestawy periodycznie ułożonych trójkątów oraz ich widma amplitudowe



Przykład 2: Dwa zestawy linii o grubości 2 piksele i długości 150 piksli każda oraz ich widma amplitudowe. Obraz z liniami równoległymi ma widmo z jednym dominującym kierunkiem, prostopadłym do kierunku linii na obrazie pierwotnym.



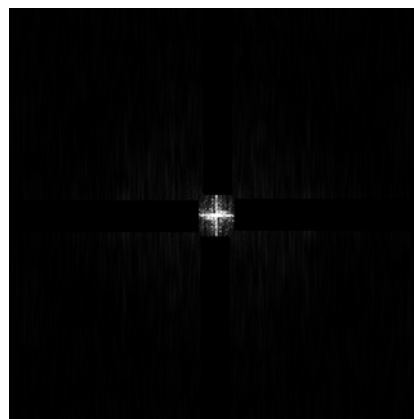
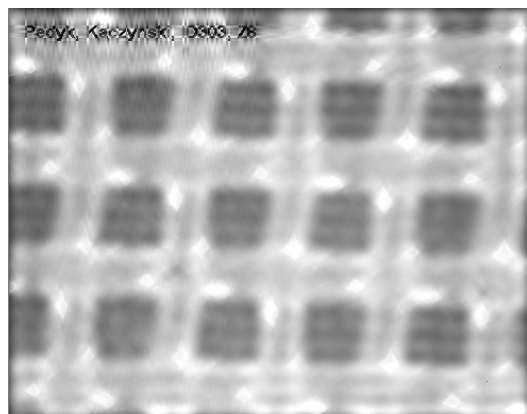
Przykład 3: Usunięcie składowych wysokoczęstotliwościowych (krawędzi) linii poziomych i pionowych poprzez wytłumienie odpowiednich obszarów widma. Składniki wysokoczęstotliwościowe w innych kierunkach pozostają bez zmian.



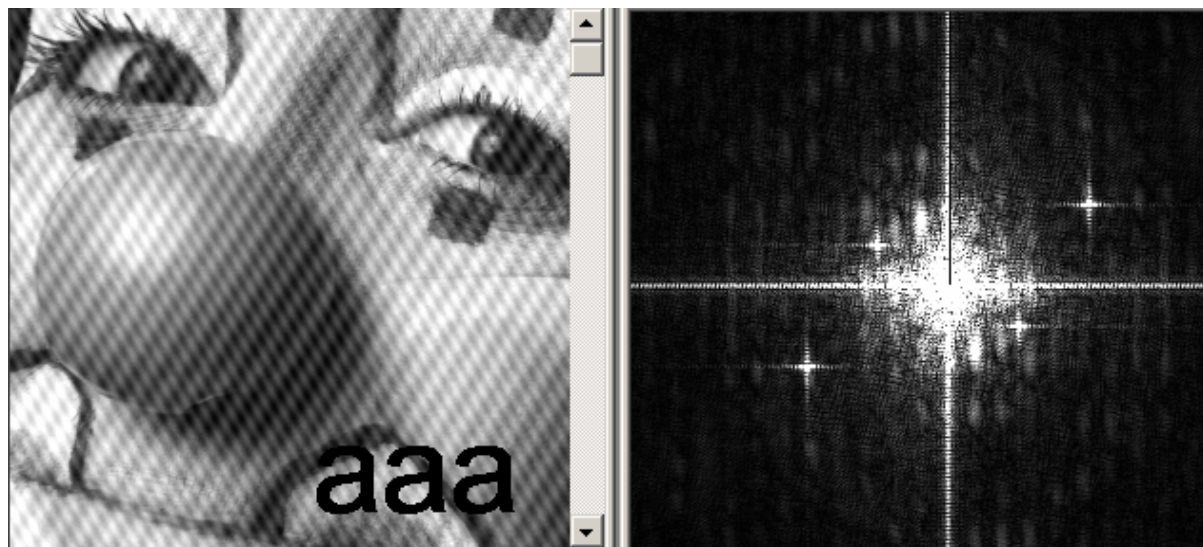
linie poziome

linie pionowe

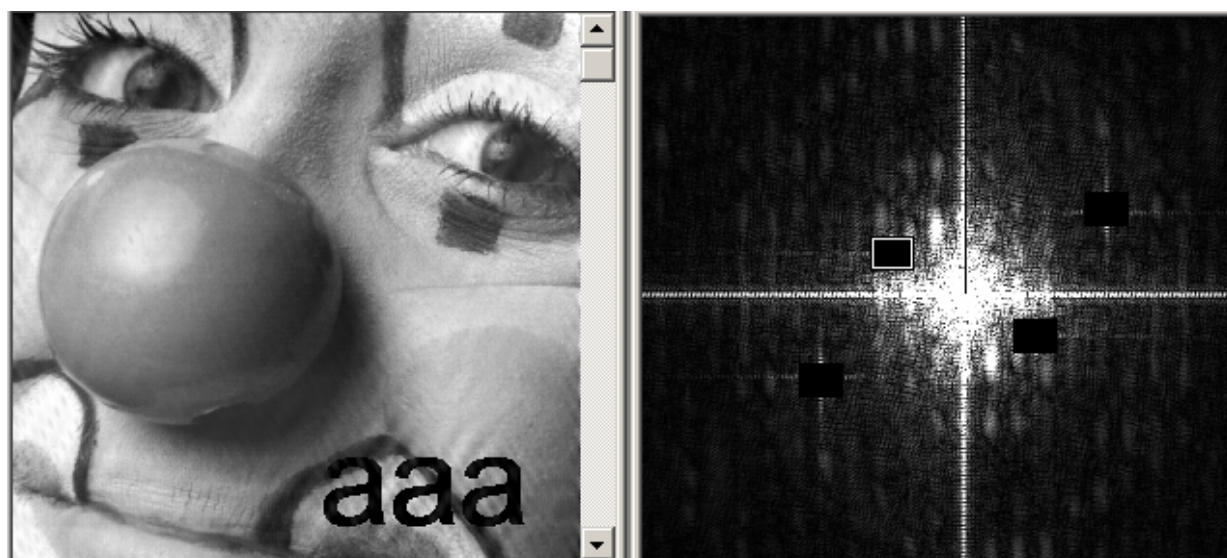
Obraz i jego widmo amplitudowe po usunięciu w/w składowych



Przykład 4: Usunięcie zakłóceń w postaci regularnie powtarzających się skośnych prążków poprzez wytlumienie odpowiednich obszarów widma



Obraz i jego widmo amplitudowe po usunięciu zakłóceń



Przykłady innych operacji globalnych i ich zastosowań:

Transformaty:

- kosinusowa
- falkowa
- Hough'a
- odległościowa

Skalowanie rozmiarów

Zniekształcenia geometryczne obrazu (przekształcenia wielomianowe)

Zastosowanie transformat w kompresji obrazów

Wymagane własności transformat:

- Takie upakowanie informacji, aby większość współczynników była zerowa (bliska zeru)
- Po kwantyzacji niezerowych współczynników minimalne zniekształcenia obrazu
- Uzyskanie dekorelacji sygnału
- Ortogonalność, zapewniającą pełną transmisję informacji
- Separowalność, zapewniającą szybkie działanie algorytmu dekompozycji

Kompresja stratna oparta na transformatach

Transformacja kosinusowa w kompresji JPEG

Transformacja falkowa w kompresji JPEG 2000

Transformacja kosinusowa

$$\exp\left[-j\frac{2\pi}{N}(ki)\right] = \cos\left(\frac{2\pi}{N}(ki)\right) - j\sin\left(\frac{2\pi}{N}(ki)\right)$$

$$F(u, v) = \frac{4c(u, v)}{N^2} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cos\frac{(2x+1)\pi u}{2N} \cos\frac{(2y+1)\pi v}{2N}$$

$$c(u, v) = \frac{1}{2} \quad u = 0 \quad \text{lub} \quad v = 0$$

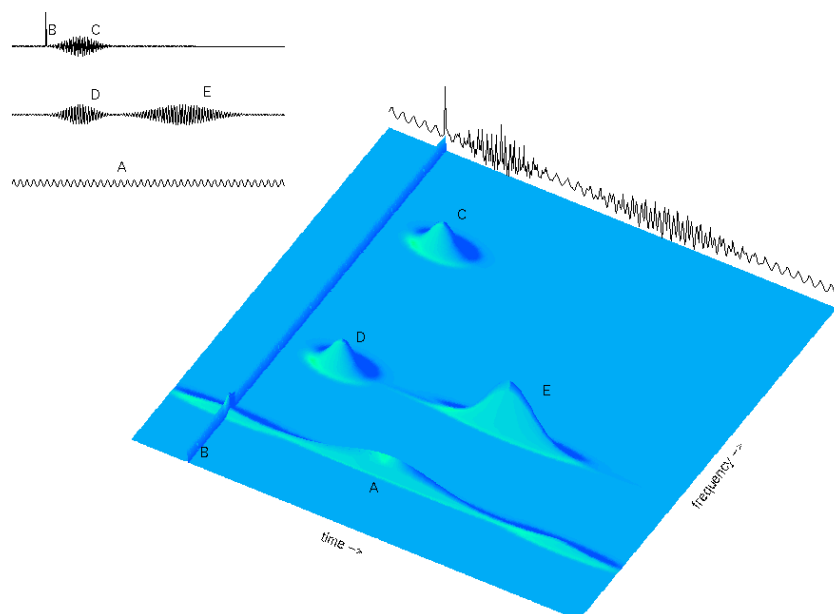
$$c(u, v) = 1 \quad \text{dla pozostałych przypadków}$$

Transformacja falkowa

Falki

Komplet funkcji umożliwiających hierarchiczną wielorozdzielczą reprezentację aproksymowanej funkcji, składający się z :

- Funkcji skalującej $\Phi(x)$
- Rodziny falek generowanych na podstawie falki podstawowej



Przykład reprezentacji falkowej odcisków palców

Original Image

50
100
150
200
250
300

50 100 150 200 250 300

Synthesized Image

Image Selection

Decomposition at level 3

dwt

idwt

Zoom X+ Y+ XY+ Center On X Y X- Y- XY-

Position X = Y =

History < > << >>

Image

Wavelet

Level

Analyze

Statistics Compress

Histograms De-noise

Decomposition at level:

View mode: Square

Full Size	1	3
	2	4

Operations on selected image:

Visualize

Full Size

Reconstruct

Colormap

Nb. Colors

Brightness

Close

Literatura podstawowa:

1. M. Doros, Przetwarzanie obrazów, Skrypt WSISIZ, Warszawa 2005, rozdz. 5.3.
2. M. Doros, A.Korzyńska, M.Przytulska, H.Goszczyńska: „Przetwarzanie Obrazów, materiały pomocnicze do ćwiczeń” Warszawa 2004, rozdz.15.

Literatura uzupełniająca:

<http://www.cl.cam.ac.uk/~fapp2/steganography/index.html>

http://www.cl.cam.ac.uk/~fapp2/steganography/image_downgrading/

<http://www.jjtc.com/Steganography/>

<http://www.petitcolas.net/fabien/steganography/>

<http://users.rowan.edu/~polikar/WAVELETS/WTtutorial.html>

Praca domowa

1. Rozwiązać zadanie 10 (Przetwarzanie obrazów, Skrypt WSISIZ, Warszawa 2005- str. 138)
2. Rozwiązać zadania przykładowe:

Zadanie 1

Dane są parametry obrazu:

- rozdzielczość w poziomach jasności: $M=256$
- rozdzielczość przestrzenna: $N \times N=512 \times 512$

Podać kilka przypadków par obrazów o podanych powyżej parametrach, dla których entropia H związana z **obrazem jako wiadomością** jest mniejsza od entropii związanej z **pikselem jako wiadomością**.

Wskazówka:

Do wzoru ogólnego na entropię podstawiamy różne rozkłady prawdopodobieństw p_k (np. w przypadku pojedynczego piksela rozkład zbliżony do *jednostajnego* (w skrajnym przypadku *jednostajny*) a w przypadku całego obrazu rozkład niejednostajny (w skrajnym przypadku obraz o jednolitej jasności np. o poziomie 200)).

Zadanie 2

Wykorzystując definicje entropii i kodu łańcuchowego o stałej długości wyznaczyć liczbę bitów wystarczającą do zakodowania każdego z kierunków występującego pomiędzy kolejnymi pikselami krzywej dyskretnej. Rozważyć 2 przypadki; a) możliwe jest wystąpienie każdego z 8 kierunków, b) możliwe jest wystąpienie jedynie 2 (wybranych w sposób arbitralny z 8) kierunków. Dla każdego z przypadków zobrazować wykorzystywane kierunki oraz naszkicować **ośmiopikslową** krzywą wraz z jej opisem za pomocą kodu łańcuchowego.