

PLANY BADANIA WG OCENY ALTERNATYWNEJ

Założmy, że kontroli podlega próba X_1, \dots, X_n pochodząca z pewnej partii towaru. Przyjmijmy, że

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } X_i \text{ spełnia wymagania,} \\ 1, & \text{jeżeli } X_i \text{ nie spełnia wymagań.} \end{cases} \quad (1)$$

Wynik kontroli opisywany jest liczbą elementów niezgodnych z wymaganiami (elementów wadliwych) w próbie

$$d = \sum_{i=1}^n X_i. \quad (2)$$

W tzw. **jednostopniowym planie badania**, decyzja o przyjęciu bądź odrzuceniu partii podejmowana jest w zależności od tego, czy $d > c$, czy też $d \leq c$, gdzie c oznacza dopuszczalną liczbę elementów wadliwych w próbie.

1

Każdy jednostopniowy plan badań wg oceny alternatywnej może więc być opisany przez parę liczb (n, c) .

Podstawową metodą projektowania planu badań jest tzw. metoda statystyczna, pozwalająca wyznaczyć parametry planu: n i c tak, aby spełnione były pewne założenia dotyczące probabilistycznych charakterystyk projektowanej procedury. Przyjęło się, że owymi charakterystykami są:

- **wadliwość dopuszczalna** p_1 (PN-ISO: jakość odpowiadająca ryzyku dostawcy) (ang. producer's quality level)
- **ryzyko dostawcy** α (ang. producer's risk)
- **wadliwość dyskwalifikująca** p_2 (PN-ISO: jakość odpowiadająca ryzyku odbiorcy) (ang. consumer's quality level)
- **ryzyko odbiorcy** β (ang. consumer's risk).

2

Dla ustalowych (np. na drodze negocjacji pomiędzy dostawcą i odbiorcą danej partii towaru) wartości wymienionych charakterystyk wyznacza się licznosc próby n i dopuszczalną liczbę elementów wadliwych w próbie c w ten sposób, aby spełnione były warunki

$$\begin{cases} P\{p_1\} = 1 - \alpha, \\ P\{p_2\} = \beta, \end{cases} \quad (3)$$

przy czym $P\{p\}$ oznacza prawdopodobieństwo przyjęcia partii o frakcji elementów wadliwych równej p (które zależy, oczywiście, od n i c). Z uwagi na to, że n i c muszą być liczbami naturalnymi, zwykle nie jest możliwe znalezienie rozwiązania układu (3). Z tego powodu układ ten zastępuje się następującym układem warunków:

$$\begin{cases} P\{p_1\} \geq 1 - \alpha, \\ P\{p_2\} \leq \beta. \end{cases} \quad (4)$$

UWAGA

Ponieważ naogół istnieje wiele planów (n, c) będących rozwiązaniem tego układu, wprowadza się dodatkowe kryteria pozwalające na wybór optymalnego planu badania. Takim najczęściej stosowanym kryterium jest minimalna licznosc próbki, a więc optymalnym, wg tego kryterium, planem badań będzie taki plan (n^*, c^*) , który spełnia warunki (4) i dla którego zachodzi $n^* \leq n$, dla wszystkich planów (n, c) spełniających (4).

Założmy, że kontroli odbiorczej poddana jest partia zawierająca N elementów. Liczba elementów niezgodnych (wadliwych) D znajdujących się w odbieranej partii, jak i w kontrolowanej n -elementowej, próbce pobranej z tej partii, jest losowa. Zmienna losowa d opisująca liczbę elementów wadliwych zaobserwowanych w próbce ma rozkład hipergeometryczny, z czego wynika, że prawdopodobieństwo zaobserwowania k elementów wadliwych wynosi

$$P\{d = k\} = \frac{\binom{n}{k} \binom{N-n}{D-k}}{\binom{N}{D}}. \quad (5)$$

W praktyce liczność próbki jest zwykle mała w porównaniu z licznością partii. Jeżeli przez $p = D/N$ oznaczmy frakcję jednostek niezgodnych oraz gdy $n/N \leq 0.1$, to rozkład liczby elementów wadliwych zaobserwowanych w próbce można przybliżać rozkładem dwumianowym i wtedy prawdopodobieństwo zaobserwowania d elementów wadliwych można obliczać ze wzoru

$$P\{d = k\} = \sum_{k=0}^c \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \quad (6)$$

Wówczas układ równań (4) przyjmuje postać

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^c \binom{n}{k} p_1^k (1-p_1)^{n-k} \geq 1-\alpha \\ \sum_{k=0}^c \binom{n}{k} p_2^k (1-p_2)^{n-k} \leq \beta \end{cases}, \quad (7)$$

a problem wyznaczenia optymalnego jednostopniowego planu badania według oceny alternatywnej sprowadza się do rozwiązania tego układu ze względu na n oraz c , a następnie wybrania rozwiązania odpowiadającego najmniejszej liczności próbki.

7

Dla odpowiednio dużych prób i zastosowaniu pewnych aproksymacji, przybliżone rozwiązanie układu (7) zaproponowane przez Halda otrzymuje się następująco: w pierwszym kroku wyznacza się n , rozwiązując równanie

$$n(p_2 - p_1) - \sqrt{n} \left(u_{1-\alpha} \sqrt{p_1(1-p_1)} + u_{1-\beta} \sqrt{p_2(1-p_2)} \right) + (k_2 - k_1) = 0, \quad (8)$$

gdzie u_γ oznaczają kwantyl rzędu γ rozkładu standardowego normalnego, natomiast

$$\begin{aligned} k_1 &= -\frac{1}{2} + \frac{(1-2p_1)(u_{1-\alpha}^2 - 1)}{6}, \\ k_2 &= -\frac{1}{2} + \frac{(1-2p_2)(u_{1-\beta}^2 - 1)}{6}, \end{aligned} \quad (9)$$

i zaokrąglając rozwiązanie do najbliższej liczby całkowitej; w drugim kroku wyznacza się wartość liczby kwalifikujące c ze wzoru

$$c = \frac{1}{2} \left[(p_1 + p_2) + \frac{1}{2} \sqrt{n} \left(u_{1-\alpha} \sqrt{p_1(1-p_1)} - u_{1-\beta} \sqrt{p_2(1-p_2)} \right) + (k_2 - k_1) \right], \quad (10)$$

i znów zaokrąglą się je do najbliższej liczby całkowitej.

8

Stosując odmienne aproksymacje możemy podać jeszcze inne rozwiązanie układu (7), mianowicie: w pierwszym kroku wyznacza się c , jako najmniejszą liczbę całkowitą spełniającą nierówność

$$\frac{p_2(2 - p_1)}{p_1(2 - p_2)} \geq \frac{\chi_{\beta, 2(c+1)}^2}{\chi_{1-\alpha, 2(c+1)}^2}, \quad (11)$$

gdzie $\chi_{\gamma, v}^2$ oznacza kwantyl rzędu γ rozkładu chi-kwadrat o v stopniach swobody; w drugim kroku wyznacza się n , jako najmniejszą liczbę całkowitą spełniającą układ nierówności

$$\frac{2 - p_2}{4p_2} \chi_{\beta, 2(c+1)}^2 + \frac{c}{2} \leq n \leq \frac{2 - p_1}{4p_1} \chi_{1-\alpha, 2(c+1)}^2 + \frac{c}{2}, \quad (12)$$

przy czym, jeżeli dla przyjętego w pierwszym kroku c nie istnieje n spełniające (12), to wartość c należy zwiększyć o 1 i od nowa zacząć wyznaczać licznosc n .

UWAGA

Jak wspomniano powyżej, wielkości dopuszczalnego przez dostawcę i odbiorcę ryzyka określane są na drodze obustronnych negocjacji. Zbyt sztywne stanowiska stron mogą sprawić, że optymalny plan badań choć będzie spełniał postawione wymagania, wymagać będzie bardzo dużej liczności próby, co w znaczący sposób wpływa na zwiększenie kosztów kontroli.

Zauważmy, że omawiany jednostopniowy plan badań według oceny alternatywnej jest niczym innym jak pewnym testem statystycznym wykorzystującym statystykę

$$d = d(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n X_i \quad (13)$$

z kryterium odrzuceń

$$d(X_1, \dots, X_n) > c \quad (14)$$

przy czym c jest wartością krytyczną testu równą dopuszczalnej liczbie elementów wadliwych w próbie.

PLANY BADANIA WG OCENY LICZBOWEJ

W planach badania **wg oceny liczbowej**, w przeciwieństwie do planów wg oceny alternatywnej, decyzję o przyjęciu bądź odrzuceniu partii towaru przyjmuje się nie na podstawie kwalifikacji elementów próbki pochodzących z partii, jako zgodne albo niezgodne z wymaganiami, ale **porównując wyniki pomiarów liczbowych pewnych charakterystyk badanego towaru z zadanymi dopuszczalnymi wartościami** (granicami tolerancji) tych charakterystyk. Ponieważ odwołanie się do dokładnych pomiarów zwiększa ilość informacji o badanej partii towaru, w rezultacie do podjęcia decyzji o przyjęciu bądź odrzuceniu partii plany badania według oceny liczbowej wymagają próbek o mniejszej liczności, niż plany według oceny alternatywnej.

Załóżmy, że kontroli podlega pewna cecha towaru (np. długość, waga, wytrzymałość, etc.) opisana zmienną losową X . Przyjmijmy, że ustalone zostały dla niej graniczne wartości, zwane także granicami tolerancji.

W zależności od sposobu zadania granic tolerancji o danej jednostce towaru powiemy, że jest niezgodna z wymaganiami, jeżeli wartość zmiennej X

- leży poniżej dolnej granicy tolerancji LSL (od ang. lower specification limit),
- albo jeżeli leży powyżej górnej granicy tolerancji USL (od. ang. upper specification limit),
- bądź też jeżeli wykracza poza dopuszczalny przedział wartości (przedział tolerancji) $[LSL, USL]$.

W praktyce przyjmuje się zazwyczaj założenie, że X ma rozkład normalny $N(\mu, \sigma)$ o znanej, albo nieznannej wariancji σ^2 , a sam plan badania według oceny liczbowej sprowadza się do weryfikacji hipotez odnoszących się do wartości oczekiwanej μ , przy czym:

- jeżeli wymagania jakościowe zadane są poprzez specyfikację dolnej granicy tolerancji, to mamy do czynienia z testowaniem hipotez $H : \mu \geq \mu_0, K : \mu < \mu_0, ,$
- przy zadanej górnej granicy tolerancji: $H : \mu \leq \mu_0, K : \mu > \mu_0, ,$
- natomiast dla przedziału tolerancji: $H : \mu = \mu_0, K : \mu \neq \mu_0.$

Różnica pomiędzy planem badań a w tradycyjny sposób postawionym zadaniem testowania hipotez polega na tym, że w przypadku planu nie znamy explicite wartości μ_0 .

Znamy natomiast wspomniane granice tolerancji oraz prawdopodobieństwa opisujące:

- **akceptowany poziom jakości** AQL (ang. acceptable quality level),
- **graniczny poziom jakości** RQL (ang. rejectable quality level),
- **ryzyko dostawcy** α (ang. producer's risk),
- **ryzyko odbiorcy** β (ang. consumer's risk),

spełniające warunki:

$$\begin{cases} P\{\text{przyjęcie partii}|AQL\} = 1 - \alpha, \\ P\{\text{przyjęcie partii}|RQL\} = \beta \end{cases} \quad (15)$$

albo też nieco mniej restrykcyjne warunki postaci

$$\begin{cases} P\{\text{przyjęcie partii}|AQL\} \geq 1 - \alpha, \\ P\{\text{przyjęcie partii}|RQL\} \leq \beta \end{cases} \quad (16)$$

Przypuśćmy, że X_1, \dots, X_n są wynikami pomiarów kontrolowanej cechy dokonanych na pobranej z partii próbce. Ponieważ plan badań według oceny liczbowej, to w istocie weryfikacja hipotez o średniej rozkładu, jest rzeczą naturalną, że jako statystykę testową używać się będzie średniej z próby, tzn.

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i. \quad (17)$$

A oto schemat sposobu podejmowania decyzji o przyjęciu bądź odrzuceniu partii towaru:

– dla zadanej dolnej granicy tolerancji LSL :

$$\begin{cases} \text{jeżeli } \bar{X} \geq LSL + k\sigma, & \text{to przyjąć partię;} \\ \text{jeżeli } \bar{X} < LSL + k\sigma, & \text{to odrzucić partię;} \end{cases} \quad (18)$$

– dla zadanej górnej granicy tolerancji USL :

$$\begin{cases} \text{jeżeli } \bar{X} \leq USL - k\sigma, & \text{to przyjąć partię;} \\ \text{jeżeli } \bar{X} > USL - k\sigma, & \text{to odrzucić partię;} \end{cases} \quad (19)$$

– dla danego przedziału $[LSL, USL]$:

$$\begin{cases} \text{jeżeli } LSL + k\sigma \leq \bar{X} \leq USL - k\sigma, & \text{to przyjąć partię;} \\ \text{jeżeli } \bar{X} < LSL + k\sigma, \text{ albo } \bar{X} > USL - k\sigma, & \text{to odrzucić partię;} \end{cases} \quad (20)$$

przy czym jeśli nieznana jest wariancja rozkładu σ^2 , to odchylenie standardowe występujące w powyższych wzorach należy zastąpić estymatorem

$$\hat{\sigma} = S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}. \quad (21)$$

Plan badania według oceny liczbowej jest więc opisany parą (n, k) , gdzie n oznacza licznosc próby, natomiast k jest stałą występującą we wzorach (18)–(20), przy czym wielkości te zależą od sposobu zadania wymagań jakościowych, a więc od przyjętych granic tolerancji, oraz od tego czy znana jest wariancja rozkładu σ^2 .

Można wykazać, że w przypadku jednostronnych granic tolerancji (tzn. LSL albo USL) i dla ustalonych wartości akceptowanego i granicznego poziomu jakości oraz ustalonych wartości ryzyka dostawcy i odbiorcy, wielkości n i k wyrażają się następująco:

– jeżeli wariancja σ^2 jest znana, to za n należy przyjąć najmniejszą liczbę naturalną większą od n' , gdzie

$$n' = \left(\frac{u_{1-\beta} + u_{1-\alpha}}{u_{1-AQL} - u_{1-RQL}} \right)^2, \quad (22)$$

natomiast

$$k = \frac{u_{1-\beta} u_{1-AQL} + u_{1-\alpha} u_{1-RQL}}{u_{1-\beta} + u_{1-\alpha}}; \quad (23)$$

– jeżeli wariancja σ^2 nie jest znana, to liczbę k wyznacza się ze wzoru

$$k = \frac{u_{1-\beta} u_{1-AQL} + u_{1-\alpha} u_{1-RQL}}{u_{1-\beta} + u_{1-\alpha}}, \quad (24)$$

po czym za licznosc próbki n przyjmuje się najmniejszą liczbę naturalną większą od n'' , gdzie

$$n'' = \left(1 + \frac{k^2}{2}\right) \left(\frac{u_{1-\beta} + u_{1-\alpha}}{u_{1-AQL} - u_{1-RQL}}\right)^2. \quad (25)$$